Revisão de Integral

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

23 de abril de 2020

Definição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Dizemos que a função* f *possui primitiva, se existir uma função* F *que satisfaz*

$$F'(x) = f(x).$$

A função F *é chamada de primitiva de* f.

Definição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dizemos que a função f possui primitiva, se existir uma função F que satisfaz

$$F'(x) = f(x).$$

A função F é chamada de primitiva de f.

Exemplo: $f(x) = 2x$

Definição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Dizemos que a função* f *possui primitiva, se existir uma função* F *que satisfaz*

$$F'(x) = f(x).$$

A função F *é chamada de primitiva de* f*.*

Exemplo: $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$ é uma primitiva para f.

Definição

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Dizemos que a função* f *possui primitiva, se existir uma função* F *que satisfaz*

$$F'(x) = f(x).$$

A função F *é chamada de primitiva de* f*.*

Exemplo: $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$ é uma primitiva para f.

Exemplo: $f(x) = 3x^2$

Definição

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dizemos que a função f possui primitiva, se existir uma função F que satisfaz

$$F'(x) = f(x).$$

A função F é chamada de primitiva de f.

Exemplo: $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$ é uma primitiva para f.

Exemplo: $f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = x^3$ é uma primitiva para f.

Definição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Dizemos que a função* f *possui primitiva, se existir uma função* F *que satisfaz*

$$F'(x) = f(x).$$

A função F *é chamada de primitiva de* f*.*

Exemplo: $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$ é uma primitiva para f.

Exemplo: $f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = x^3$ é uma primitiva para f.

Exemplo: $f(x) = 1$

Definição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dizemos que a função f possui primitiva, se existir uma função F que satisfaz

$$F'(x) = f(x).$$

A função F é chamada de primitiva de f.

Exemplo: $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$ é uma primitiva para f.

Exemplo: $f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = x^3$ é uma primitiva para f.

Exemplo: $f(x) = 1 \Rightarrow F(x) = x$ é uma primitiva para f.

Definição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dizemos que a função f possui primitiva, se existir uma função F que satisfaz

$$F'(x) = f(x).$$

A função F é chamada de primitiva de f.

Exemplo: $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$ é uma primitiva para f.

Exemplo: $f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = x^3$ é uma primitiva para f.

Exemplo: $f(x) = 1 \Rightarrow F(x) = x$ é uma primitiva para f. A função $F(x) = x + 1$ também é uma primitiva de f. De um modo geral, $F(x) = x + c$, sendo c um valor constante, é uma primitiva para f.

Se F é uma primitiva para f, então $F(x) + c$ também é uma primitiva para f. Ou seja,

$$(F(x) + c)' = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Se F é uma primitiva para f, então $F(x) + c$ também é uma primitiva para f. Ou seja,

$$(F(x) + c)' = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Escrevemos esse problema na seguinte forma:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

e dizemos que $\int f(x)dx$ é a integral da função f com respeito a variável x e c é dita constante de integração.

Se F é uma primitiva para f, então $F(x) + c$ também é uma primitiva para f. Ou seja,

$$(F(x) + c)' = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Escrevemos esse problema na seguinte forma:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

e dizemos que $\int f(x)dx$ é a integral da função f com respeito a variável x e c é dita constante de integração.

Exemplo: $\int cos(x)dx =$

Se F é uma primitiva para f, então $F(x) + c$ também é uma primitiva para f. Ou seja,

$$(F(x) + c)' = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Escrevemos esse problema na seguinte forma:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

e dizemos que $\int f(x)dx$ é a integral da função f com respeito a variável x e c é dita constante de integração.

Exemplo: $\int cos(x)dx = sen(x) + c$.

Se F é uma primitiva para f, então $F(x) + c$ também é uma primitiva para f. Ou seja,

$$(F(x) + c)' = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Escrevemos esse problema na seguinte forma:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

e dizemos que $\int f(x)dx$ é a integral da função f com respeito a variável x e c é dita constante de integração.

Exemplo: $\int cos(x)dx = sen(x) + c$.

Exemplo: $\int e^x dx =$

Se F é uma primitiva para f, então $F(x) + c$ também é uma primitiva para f. Ou seja,

$$(F(x) + c)' = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Escrevemos esse problema na seguinte forma:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

e dizemos que $\int f(x)dx$ é a integral da função f com respeito a variável x e c é dita constante de integração.

Exemplo: $\int cos(x)dx = sen(x) + c$.

Exemplo: $\int e^x dx = e^x + c$.

Propriedades

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$

Propriedades

- $\displaystyle\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\displaystyle\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

Exemplo:

$$\int 2x + 1dx = \int 2xdx + \int 1dx = x^2 + c_1 + x + c_2 = x^2 + x + c.$$

Propriedades

- $\displaystyle\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\displaystyle\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

Exemplo:

$$\int 2x + 1dx = \int 2xdx + \int 1dx = x^2 + c_1 + x + c_2 = x^2 + x + c.$$

Exemplo:

$$\int 3x^2 - 4xdx = 3\int x^2dx - 4\int xdx = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + c = x^3 - 2x^2 + c.$$

Primitivas de funções

Integral	Primitiva da função
$\int cdx$	cx+k
$\int \frac{1}{x}dx$	ln(x)+k
$\int e^x dx$	e^x+k
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$+k
$\int sen(x)dx$	-cos(x)+k
$\int cos(x)dx$	sen(x)+k

Integrais definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

sendo F uma primitiva de f.

Integrais definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

sendo F uma primitiva de f.

Exemplo: $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx =$

Integrais definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

sendo F uma primitiva de f.

Exemplo: $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 =$

Integrais definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

sendo F uma primitiva de f.

Exemplo: $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

Observação: Nas integrais definidas, não tem necessidade de se colocar as constantes de integração c.

Observação: Nas integrais definidas, não tem necessidade de se colocar as constantes de integração c.

Exemplo:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(x)dx$$

Observação: Nas integrais definidas, não tem necessidade de se colocar as constantes de integração c.

Exemplo:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(x)dx = sen(x) + c\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

Observação: Nas integrais definidas, não tem necessidade de se colocar as constantes de integração c.

Exemplo:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(x)dx &= sen(x) + c\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= sen(\pi) + c - \left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + c\right) \end{aligned}$$

Observação: Nas integrais definidas, não tem necessidade de se colocar as constantes de integração c.

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(x)dx &= sen(x) + c\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= sen(\pi) + c - \left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + c\right) \\
&= sen(\pi) {\color{red}+c} - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) {\color{red}-c}
\end{aligned}$$

Observação: Nas integrais definidas, não tem necessidade de se colocar as constantes de integração c.

Exemplo:

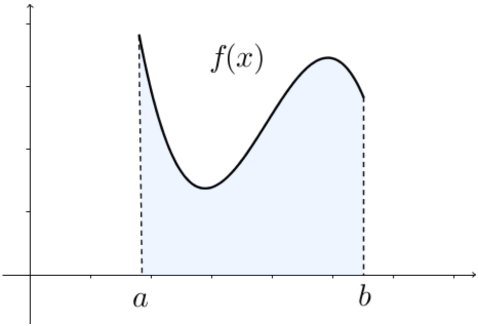
$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(x)dx &= sen(x) + c\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= sen(\pi) + c - \left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + c\right) \\ &= sen(\pi) {\color{red}+c} - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) {\color{red}-c} \\ &= 0 - 1 \end{aligned}$$

Observação: Nas integrais definidas, não tem necessidade de se colocar as constantes de integração c.

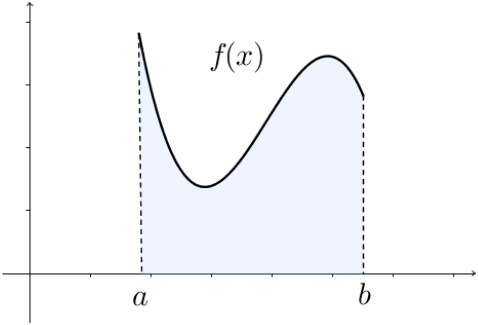
Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(x)dx &= sen(x) + c\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= sen(\pi) + c - \left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + c\right) \\
&= sen(\pi) {\color{red}+c} - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) {\color{red}-c} \\
&= 0 - 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Aplicações: Área



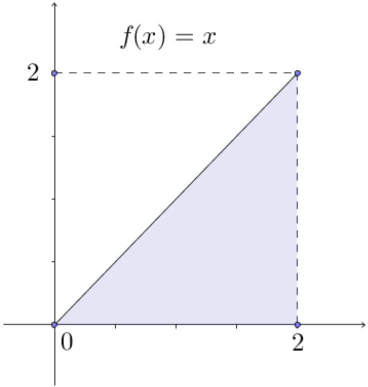
Aplicações: Área



$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$$

Exemplo:

Calcule a área da região abaixo da função $f(x) = x$ no intervalo $[0, 2]$.



Exemplo:

$$\text{Área} = \int_0^2 x dx$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 x dx \\ &= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 \end{aligned}$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^2 x dx \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 \\
&= \frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^2 x dx \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 \\
&= \frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \\
&= \frac{4}{2} - 0
\end{aligned}
$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^2 x dx \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 \\
&= \frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \\
&= \frac{4}{2} - 0 \\
&= 2 - 0
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^2 x dx \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 \\
&= \frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \\
&= \frac{4}{2} - 0 \\
&= 2 - 0 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Aplicações

Outras aplicações:

1. Comprimento de curvas;
2. Centro de Massa;
3. Trabalho realizado por uma força;
4. Circuitos elétricos;
5. Energia cinética.

Métodos de integração

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Métodos de integração

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Exemplo:
$\int cos(2x)dx =$

Métodos de integração

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Exemplo:
$\int cos(2x)dx = \int cos(u)\frac{du}{2} =$

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Exemplo:

$\int cos(2x)dx = \int cos(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int cos(u)du =$

Métodos de integração

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Exemplo:
$\int cos(2x)dx = \int cos(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int cos(u)du = \frac{1}{2}sen(u) + k$

Métodos de integração

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Exemplo:
$\int cos(2x)dx = \int cos(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int cos(u)du = \frac{1}{2}sen(u) + k$

$$\int cos(2x)dx = \frac{1}{2}sen(2x) + k$$

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Métodos de integração

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplo:
$\int ln(x)dx =$

Métodos de integração

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplo:

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int \frac{1}{x}xdx =$

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplo:
$\int ln(x)dx = xln(x) - \int \frac{1}{x}xdx = xln(x) - \int 1dx =$

Métodos de integração

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplo:

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int \frac{1}{x}xdx = xln(x) - \int 1dx = xln(x) - x + k$

Métodos de integração

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplo:

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int \frac{1}{x}xdx = xln(x) - \int 1dx = xln(x) - x + k$

$$\int ln(x)dx = xln(x) - x + k$$

Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação

site: `https://viniciuswasques.github.io/home/`